***Богомолова Ольга Борисовна,***
***Усенков Дмитрий Юрьевич***

# НОВЫЕ ЗАДАЧИ № 21 – ВДВОЕ СЛОЖНЕЕ

Ну, любят разработчики заданий ЕГЭ наших школьников. Так любят, что просто-таки не спят ночами и стараются каждый год придумывать для них все новые и новые варианты задач, решать которые все сложнее и сложнее. Иной раз не всякий учитель это может сделать, и исподволь закрадывается мысль, что основная цель нынешнего ЕГЭ – всеми силами не дать выпускникам получить высокие баллы и успешно поступить в желаемый вуз (ну, кроме разве что учащихся-«олимпиадников», которые поступают в институт и так, победив в олимпиаде).

Очередной «герой» нашей статьи – новая задача на анализ программ, которая числится под номером 21. Раньше такие задачи мы уже успешно решали (см. «Компьютерные инструменты в школе» №1 за 2017 год), но теперь их условие изменено.

**Задача.** Укажите количество различных значений входной переменной $k$, при которых программа выдает тот же ответ, что и при входном значении $k = 55$. Само значение 55 тоже включается в подсчет.


```
var k,i: integer;
Function F(x:integer):integer;
 begin
  F:=x*x
 end;
begin
 readln(k);
 i:=1;
 while (F(i)<=k) do i:=2*i;
 if 2*F(i)-k > F(i-1)+k then
                           writeln(i*2)
 else writeln(i)
end.
```

*Всё «портит» добавленный после цикла условный оператор, который может выводить на экран либо само значение i, достигнутое после завершения цикла, либо значение i*2. Из-за этого решение становится существенно сложнее.*

***Решение***[1]

1. Анализируем алгоритм.

```
Function F(x:integer):integer;
 begin
  F:=x*x
 end;
…
i:=1;
 while (F(i)<=k) do i:=2*i;
 if 2*F(i)-k > F(i-1)+k then
                           writeln(i*2)
 else writeln(i)
```

1) функция $F$ выполняет возведение переданного ей значения в квадрат;

2) цикл работает «вхолостую», меняя только значение цикловой переменной (**умножая ее на 2**), пока истинно условие `F(i)<=k`;

3) после завершения цикла выполняется оператор `if`: проверяется условие `2*F(i)-k > F(i-1)+k`, и, в зависимости от его истинно-

[1] Решение предложено Арсением Парфеновым – студентом МГУ, выпускником 2015 года, сдавшим ЕГЭ по информатике на 100 баллов, бывшим учащимся одного из авторов статьи.

сти или ложности, выводится либо само значение ***i***, полученное после завершения цикла, либо **удвоенное значение *i***.

2. Для удобства переписываем заданные нам условия цикла и ветвления, подставляя в них заданную функцию *F* (см. рис. 1).

Таким образом, мы можем отметить:

– цикл завершается, когда его условие становится ложным, то есть `i*i>k`.

> *В заданном условии цикла знак неравенства меняется на противоположный, а строгое неравенство меняется на нестрогое и наоборот.*

– цикл еще в последний раз выполняется, когда его условие истинно, но при предыдущем значении *i*. Поскольку в цикле *i* умножается на два, предыдущее значение соответствует ***i*/2**. Тогда соответствующее неравенство: `(i/2)*(i/2)<=k`.

– в операторе `if` условие: `2*i*i-k > (i-1)*(i-1)+k`.

3. Найдем, при каком значении *i* заканчивается цикл, если задано $k = 55$.

> *Соответствующие неравенства см. выше. В них нужно подставить заданное значение k.*

1) цикл завершается, когда: `i*i>k` ⇒ `i*i>55`.

2) цикл еще в последний раз выполняется, когда: `(i/2)*(i/2)<=k` ⇒ `(i/2)*(i/2)<=55` ⇒ `i*i/4<=55` ⇒ `i*i<=220`.

Итак, имеем два неравенства: `i*i>55` и `i*i<=220`.

При этом помним, что *i* изначально равно 1 и каждый раз удваивается, то есть возможные значения *i* равны: 1, 2, 4, 8, 16, …

> *В промежутке от 55 до 220 находится только одно значение квадрата допустимого значения i: 64, то есть $8^2$. Значение $4^2 = 16$ слишком мало, а значение $16^2 = 256$ – слишком велико.*

Тогда получаем, что для ***k* = 55** цикл завершается при ***i* = 8**.

4. Проверяем, истинно ли условие в операторе `if` при полученных значениях ***k* = 55** и ***i* = 8**.

> *Соответствующее неравенство см. выше. В него нужно подставить заданное значение **k** и полученное значение i. В зависимости от истинности полученного неравенства выводится значение* `i*2`*, если условие истинно, или значение **i**, если условие ложно:* `if 2*F(i)-k > F(i-1)+k then writeln(i*2) else writeln(i)`.

`2*i*i-k > (i-1)*(i-1)+k` ⇒ `2*8*8-55 > (8-1)*(8-1)+55` ⇒ `73 > 104`.

Это неравенство (условие) ложно. Следовательно, при заданном значении ***k* = 55** программа выводит значение ***i* = 8**.

5. Теперь нужно найти, в каких случаях программа может вывести то же самое значение **8**. Очевидно, это может произойти в двух случаях:

а) если условие в операторе `if` ложно и выводится значение *i*, равное 8;

б) если условие в операторе `if` истинно и выводится значение *i**2, равное 8. Последнее означает, что $i = 4$, то есть цикл завершился на один шаг раньше.

6 а). Ищем все возможные значения *k* в первом из указанных случаев, то есть когда ***i* = 8** и условие в операторе `if` ложно.

```
…
  F:=x*x
…
i:=1;
 while (F(i)<=k) do i:=2*i;
 if 2*F(i)-k > F(i-1)+k then
writeln(i*2)
 else writeln(i)
```

```
i:=1;
 while i*i<=k do i:=2*i;
 if 2*i*i-k > (i-1)*(i-1)+k then
writeln(i*2)
 else writeln(i)
```

**Рис. 1**

*Помним, что цикл завершается, когда: `i*i>k`, и что цикл еще в последний раз выполняется, когда: `(i/2)*(i/2)<=k`. Подставляем в эти неравенства найденное значение* $i = 8$.

1) цикл завершается при `i*i>k` ⇒ `8*8>k` ⇒ `k<64`;

2) цикл еще в последний раз выполняется, когда: `(i/2)*(i/2)<=k` ⇒ `(8/2)*(8/2)<=k` ⇒ `4*4<=k` ⇒ `k>=16`;

3) тогда допустимые значения $k$ лежат в интервале: `[16, 64)`;

*Заметим, что граничное значение 64 в интервал* ***не входит****, так как соответствующее неравенство – строгое.*

4) однако при этом условие в операторе `if` должно быть ложным, то есть `2*i*i-k <= (i-1)*(i-1)+k`;

*Берем исходное условие в операторе* `if` *и заменяем в нем знак неравенства на противоположный, а строгое неравенство заменяем на нестрогое и наоборот.*

подставляя в это неравенство значение $i = 8$, получаем:
`2*i*i-k <= (i-1)*(i-1)+k` ⇒
`2*8*8-k <= (8-1)*(8-1)+k` ⇒
`128-k <= 49+k` ⇒ `79 <= 2*k` ⇒
`2*k >= 79` ⇒ `k >= 39,5`;
учитывая же, что значение $k$ должно быть целым, получаем: `k >= 40`;

5) в итоге имеем: `k` ∈ `[16, 64)` и `k >= 40`, тогда `k` ∈ `[40, 64)`.

6 б). Ищем все возможные значения $k$ во втором из указанных случаев, то есть когда $i = 4$ и условие в операторе `if` истинно:

*Помним, что цикл завершается, когда: `i*i>k`, и что цикл еще в последний раз выполняется, когда: `(i/2)*(i/2)<=k`. Подставляем в эти неравенства найденное значение* $i = 4$.

1) цикл завершается при `i*i>k` ⇒ `4*4>k` ⇒ `k<16`;

2) цикл еще в последний раз выполняется, когда: `(i/2)*(i/2)<=k` ⇒ `(4/2)*(4/2)<=k` ⇒ `2*2<=k` ⇒ `k>=4`;

3) тогда допустимые значения $k$ лежат в интервале: [4, 16).

*Заметим, что граничное значение 16 в интервал* ***не входит****, так как соответствующее неравенство – строгое.*

4) при этом условие в операторе `if` должно быть истинным, то есть `2*i*i-k > (i-1)*(i-1)+k`;
подставляя в это неравенство значение $i = 4$, получаем: `2*i*i-k > (i-1)*(i-1)+k` ⇒ `2*4*4-k > (4-1)*(4-1)+k` ⇒ `32-k > 9+k` ⇒ `23 > 2*k` ⇒ `2*k < 23` ⇒ `k < 11,5`;
учитывая, что значение $k$ должно быть целым, получаем: `k <= 11`;

5) в итоге имеем: `k` ∈ `[4, 16)` и `k <= 11`, тогда `k` ∈ `[4, 11]`.

*В конкретных задачах возможно, что в случае (а) или (б) решения не будет, так как условие, полученное из оператора* `if`*, не совместно с интервалом значений* **k***, полученных из анализа работы цикла. Тогда последующий подсчет количества значений* **k** *выполняется только для существующего интервала (для данного случая).*

7. Подсчитываем количества допустимых значений **k** в каждом из двух случаев:

а) при `k` ∈ `[40, 64]`: 64 – 40 = 24;

б) при `k` ∈ `[4, 11]`: 11 – 4 + 1 = 8.

В сумме это дает 24 + 8 = 32 различных значения $k$.

*Вычислить количество значений в заданном интервале можно по следующим правилам:*

*– если обе границы интервала входят в него, то количество значений равно разности большего и меньшего граничных значений плюс единица;*

*– если одна из границ интервала не входит в него, то количество значений равно разности большего и меньшего граничных значений;*

*– если обе границы интервала не входят в него, то количество значений равно разности большего и меньшего граничных значений минус единица.*

*Ответ:* 32.